2013年浙江省专升本统一考试高等数学真题试卷

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					

考试说明：

1、考试时间为 **150** 分钟；

2、满分为 **150** 分；

3、答案请写在试卷纸上，用蓝色或黑色墨水的钢笔、圆珠笔答卷，否则无效；

4、密封线左边各项要求填写清楚完整。

一、选择题（每个小题给出的选项中，只有一项符合要求：本题共有 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

得分	阅卷人

1. 设 $f(x)=\sin(\cos 2^x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则此函数是(　　)

A. 有界函数　　B. 奇函数

C. 偶函数　　D. 周期函数

2. 若函数 $y=f(x)$ 是区间 $[1,5]$ 上连续函数，则该函数一定(　　)

A. 在区间 $[1,5]$ 上可积　　B. 在区间 $(1,5)$ 上有最小值

C. 在区间 $(1,5)$ 上可导　　D. 在区间 $(1,5)$ 上有最大值

3. $\int_0^{\pi} x\cos x dx=$　　(　　)

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. -2

4. 由曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=x$ 所围成的平面图形的面积为(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{3}$　　　　D. 1

5. 已知二阶微分方程 $y''+y'-6y=3e^{2x}\sin x\cos x$，则设其特解形式为( )

A. $e^{2x}(a\cos x+b\sin x)$　　　　B. $e^{2x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$

C. $xe^{2x}(a\cos x+b\sin x)$　　　　D. $xe^{2x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$

二. 填空题:(只须在横线上直接写出答案,不必写出计算过程,每小题 4 分,共 40 分)

得分	阅卷人

6．极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\sin(x^2)=$__________.

7. 函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 的定义域为_________.

8. 已知 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}=$___________.

9. 若函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^{\sin y}$ 所确定，则 $y'=$_________.

10. $\int\dfrac{dx}{x\ln x}=$________.

11. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+3\sin\dfrac{3}{n}+\cdots+n\sin 1)$ 用定积分表示为___

12. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n}$ 的收敛区间是___________.

13. 常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^2$ 的通解为_____________.

14. 法向量为 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$ 的过点 $(1,0,1)$ 的平面方程是_____________.

15. 球面 $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ 与平面 $2x+y-z+26=0$ 之间的距离等于_______

三、计算题：本大题共 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题小题 8 分，共 60 分.计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分.

得分	阅卷人

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x\sin x-ax(1+x)}{\sin^3 x}, & -\pi<x<0\\ \dfrac{1}{3}, & x\geq 0\end{cases}$，若 $f(x)$ 是连续函数，求 a 的值.（7 分）

17. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$.（7 分）

18. 求函数 $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$ 的单调区间以及凹凸区间.（7 分）

19. 讨论方程$3x^2-1=\cos x$的根的个数.（7 分）

20. 求$\int x\sin 2xdx$ （8 分）

21. 计算$\int_0^1 \frac{2\ln(1+x)}{1+x}dx$.（8 分）

22. 计算瑕积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$.（8 分）

23. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域.（8 分）

四．综合题：本大题共 3 小题，每题 10 分，共 30 分.

得分	阅卷人

24. 证明：若 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(t)dt, & f(x) \\ 0, & f(x) \end{cases}.$$（10 分）

25. 设 $f(t)$ 是实的非负可积函数，若可积函数 $x(t)$ 满足

$x(t)\le\int_0^t f(s)x(s)ds$，则 $x(t)\le 0$.（10 分）

26. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域中有连续的一阶导数，$f'(0)=0$，$f''(0)$ 存在. 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^4}=\dfrac{1}{6}f''(0)$.（10 分）

2013 年高等数学真题试卷参考答案及评分标准

一、选择题（每个小题给出的选项中，只有一项符合要求：本题共有 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

题　号	1	2	3	4	5
答　案	A	A	D	没正确答案	B

1. A

解析：因为 $-1 \le \sin(\cos 2^x) \le 1$，所以函数 $f(x) = \sin(\cos 2^x)$ 是有界函数，容易验证 $f(x) = \sin(\cos 2^x)$ 是非奇非偶函数，非周期函数，所以答案 A 正确。

2. A

解析：由可积的充要条件可知，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,5]$ 上连续 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在闭区间 $[1,5]$ 上可积。因此，选项 A 正确。

3. C

解析：$\int_0^\pi x\cos x dx = \int_0^\pi x d\sin x = x\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x|_0^\pi = -2$.

4.

解析：据题意画图可知，$\int_0^1 \sqrt{x} dx - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} |_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

5. B

解析：特征方程为 $r^2 + r - 6 = 0$，解得 $r_1 = -3$， $r_2 = 2$，而 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根， 所以取 $k = 1$，所以 $y'' + y' - 6y = 3e^{2x}\sin x\cos x$ 的特解形式可设为 $y^* = xe^{2x}(a\cos 2x + b\sin 2x)$，选项 B 正确。

二. 填空题:(只须在横线上直接写出答案,不必写出计算过程,每小题 4 分,共 40 分)

6. 0

解析：$\lim\limits_{x\to 0} x\ln\sin(x^2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin(x^2)}{1/x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos(x^2)}{\sin x^2}\cdot(-x^2)$

$$=-\lim_{x\to 0}2x\cos(x^2)=0$$

7. $[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in Z)$

解析：由 $0\le\sin x\le 1$ 解得 $2k\pi\le x\le(2k+1)\pi$ （$k\in Z$）

8. -2

解析：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2f'(1)=-2.$$

9. $\dfrac{e^{\sin y}}{1-xe^{\sin y}\cos y}$

解析：隐函数方程求导，$y'=e^{\sin y}+xy'e^{\sin y}\cdot\cos y$，解得

$$y'=\frac{e^{\sin y}}{1-xe^{\sin y}\cos y}.$$

10. $\ln|\ln x|+C$

解析：$\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln|\ln x|+C$

11. $\int_0^1 x\sin x dx$

解析：利用定积分的定义求极限，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+3\sin\frac{3}{n}+\cdots+n\sin 1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\frac{3}{n}\sin\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin 1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x dx.$$

12. $(-1,1)$

解析：利用比值判别法的思想，$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+3}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^{2n+1}}|=x^2<1$，

解得$-1<x<1$。

13. $\frac{1}{y}=e^{\int p(x)dx}[-\int Q(x)\cdot e^{\int -p(x)dx}dx+C]$

解析：伯努利方程，令$z=\frac{1}{y}$，则$y=\frac{1}{z}$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx}$，所以

$-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)\cdot\frac{1}{z}=Q(x)\cdot\frac{1}{z^2}\Rightarrow\frac{dz}{dx}-P(x)\cdot z=-Q(x)$，由一阶线性微分方程的通解公式可知，$z=e^{\int P(x)dx}[\int -Q(x)\cdot e^{\int -P(x)dx}dx+C]$，

即 $\frac{1}{y}=e^{\int P(x)dx}[-\int Q(x)\cdot e^{\int -P(x)dx}dx+C]$.

14. $x-3y+2z-3=0$

解析：由点法式可知，所求平面方程为$1\cdot(x-1)-3(y-0)+2(z-1)=0$，

即 $x-3y+2z-3=0$。

15. $4\sqrt{6}-2$

解析：球心坐标为$(0,0,2)$，半径$R=2$，球心到平面$2x+y-z+26=0$的距离为$\frac{|0+0-2+26|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{24}{\sqrt{6}}=4\sqrt{6}$，故所求距离为$4\sqrt{6}-2$.

三、计算题：（计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分，共 **60** 分）

16. 解：因函数 $f(x)$ 是连续函数，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ··· 2 分

由左连续可 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x\sin x-ax(1+x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x\sin x-ax(1+x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-a-2ax}{3x^2}=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{3}$ ······ 5 分

$\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x\sin x+e^x\cos x-a-2ax)=0$，可得 $a=1$ ······ 7 分

17. 解：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ ······ 2 分

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\ \underline{\underline{t=\frac{1}{x}}}\ \lim_{t\to\infty} te^{-t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$$ ······ 6 分

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ ······ 7 分

18. 解：易知函数 $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$ 的定义域为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

且 $y'=\dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}}{x^2}=\dfrac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$ ······ 2 分

令 $y'=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$（驻点）

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$y'>0$；当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$y'<0$，故 $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取极小值单调增区间为 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$，单调减区间为 $(-\infty,0)$，$(0,\dfrac{1}{2})$. …… 5 分

又因 $y''=\dfrac{(4x^2-4x+2)e^{2x}}{x^3}$，所以当 $x>0$ 时，$y''>0$；当 $x<0$ 时 $y''<0$，故函数 $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$ 的凹区间为 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$ ……7 分

19. 解：令 $f(x)=3x^2-1-\cos x$，$f(0)=-2<0$，$f(-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3\pi^2}{4}-1>0$，$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3\pi^2}{4}-1>0$，且 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 和 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续

所以由零点定理知，至少存在一点 $\xi_1\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 和 $\xi_2\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 使得 $f(\xi_1)=0$ 且 $f(\xi_2)=0$. …… 4 分

又因 $f'(x)=6x+\sin x$，$f''(x)=6+\cos x>0$，所以 $f'(x)$ 是增函数

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<f'(0)$，即 $f'(x)<0$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)$，即 $f'(x)>0$

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增

因此，综上可知方程 $3x^2-1=\cos x$ 共有 2 个根。 …… 7 分

20．解：$\int x\sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}\int xd\cos 2x$ …… 4 分

$=-\dfrac{1}{2}[x\cos 2x-\int\cos 2xdx]=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{2}\int\cos 2xdx$ …… 6 分

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$ …… 8 分

21．解：$\int_0^1\frac{2\ln(1+x)}{1+x}dx=2\int_0^1\ln(1+x)d\ln(1+x)$

$$=\ln^2(1+x)|_0^1=(\ln 2)^2$$ …… 8 分

22. 解：$x=0$ 是瑕点， …… 1 分

$$\int\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx\xlongequal{x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t}\int\sec t dt$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln|2x+2\sqrt{x^2+x}+1|+C$$ …… 6 分

所以 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=[\ln|2x+2\sqrt{x^2+x}+1|]_0^1=\ln(3+2\sqrt{2})$ …… 8 分

23．解：$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{(x+3)(x-2)}=\frac{1}{5}[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}]$ …… 2 分

又因 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$， $x\in(-1,1)$

所以 $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$，　　$|\frac{x}{2}|<1$

$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}}$，　　$|\frac{x}{3}|<1$

所以 $f(x)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}]x^n$， $x\in(-2,2)$ …… 6 分

当 $x=-2$ 时， $f(-2)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2}+\frac{2^n}{3^{n+1}}]$ 发散

当 $x=2$ 时，$f(2)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}]$ 发散

所以收敛域为 $x\in(-2,2)$ …… 8 分

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分.

24. 证明：因为 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$

$\int_{-a}^{0}f(x)dx\underline{\underline{t=-x}}\int_{a}^{0}f(-t)(-dt)=\int_{0}^{a}f(-t)dt$ …… 4 分

（ⅰ）若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{0}^{a}f(-t)dt=\int_{0}^{a}f(t)dt$

所以 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$；

（ⅱ）若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{0}^{a}f(-t)dt=-\int_{0}^{a}f(t)dt$

所以 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx=0$

综合 i 和 ii 可知

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\int_{0}^{a}f(t)dt, & 若f(x)为偶函数,\\ 0, & 若f(x)为奇函数.\end{cases}$$ …… 10 分

25. 证明：令 $F(t)=\int_{0}^{t}f(s)x(s)ds$，则 $F'(t)=f(t)x(t)$

所以 $x(t)=\frac{F'(t)}{f(t)}$，$F(0)=0$

又∵ $x(t)\le\int_{0}^{t}f(s)x(s)ds$，且 $f(t)$ 是实的非负可积函数

$\therefore \frac{F'(t)}{f(t)}\le F(t)\Rightarrow F'(t)\le F(t)\cdot f(t)$

$\therefore F'(t)-F(t)\cdot f(t)\le 0$ …… 5 分

$\therefore [e^{-\int_{0}^{t}f(s)ds}\cdot F(t)]'\le 0$

$\therefore$ 函数 $G(t)=e^{-\int_0^t f(s)ds}\cdot F(t)$ 单调递减

$\therefore$ 当 $t\geq 0$ 时， $G(t)\leq G(0)$，即 $e^{-\int_0^t f(s)ds}\cdot F(t)\leq 0$，所以 $F(t)\leq 0$

$\therefore$ $x(t)\leq 0$ …… 10 分

26. 证明： $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域中有连续的一阶导数

所以由拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\sin x,x)\subset(0,\delta)$，

其中 $0<\sigma<1$ 使得 $f(x)-f(\sin x)=f'(\xi)(x-\sin x)$

所以 $\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{\xi}{x}<1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\xi}{x}=1$（利用夹逼准则可得）

所以当 $x\to 0^+$ 时，$\xi\sim x$ …… 5 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(\xi)(x-\sin x)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{f'(\xi)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(\xi)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=\dfrac{1}{6}f''(0)$ …… 10